Pares Ordenados

IMPORTANCIA DE LOS TEOREMAS DE EXISTENCIA EN EDO DE PRIMER ORDEN

Aprendiz: *José Fabián Hernández Solís*
Mentor: *Edgardo Chunga Rojas*

2023

Al iniciar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), existen dos preguntas que se deben realizar: ¿en qué circunstancias tienen solución? Si la ecuación tiene solución, ¿en qué circunstacias, es única o tiene más soluciones?

Para este proyecto, analizaremos estas preguntas especificamente en las EDO de primer orden, es decir en las ecuaciones que tienen la forma:

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

Además, analizaremos algunas propiedades importantes de estas ecuaciones.

1. Existencia de las soluciones

A continuación, se van a enunciar 3 teoremas que garantizan la existencia de las soluciones.

Teorema de Existencia de Picard-Lindelöf

El Teorema de Existencia de Picard-Lindelöf responde a estas cuestiones al establecer que bajo ciertas condiciones adecuadas, una ecuación diferencial ordinaria tiene soluciones y que estas soluciones **son únicas** en un intervalo abierto alrededor de un punto inicial. En otras palabras, proporciona un marco sólido para la existencia y unicidad de soluciones locales para ecuaciones diferenciales ordinarias.

El teorema de existencia de Picard-Lindelöf establece lo siguiente:

Teorema de Existencia de Picard-Lindelöf: Sea D un subconjunto abierto en el espacio euclideo (t, x). Considere el punto $(t_0, x_i) \in D$ y sean a y b constantes reales positivas tal que que el conjunto:

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_i| \leq b\}$$

está contenido en D. Ahora, suponga que existe una función que está bien definida y es continua en D, la cual cumple la condición Lipschitz con respecto a $x \in R$. Denote:

$$M = \max_{(t,x)\in R} |f(t,x)|$$

$$A = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

Entonces, la ecuación diferencial (1) tiene solución única $x(t, t_0, x_i)$ en el vecidario $(t_0 - A, t_0 + A)$ tal que $x(t_0, t_0, x_i) = x_i$, tal que se satisface:

$$|x(t, t_0, x_i) = x_i| \leq MA; \; \forall t \in (t_0 - A, t_0 + A)$$

Aquí surgen otras 2 preguntas interesantes que debemos responder en este proyecto.

i) ¿La solución es continua o diferenciable con respecto al valor incial de x_i?

ii) ¿Qué tan grande o que tan pequeño es el dominio de las soluciones?

Observación: La solución $x(t, t_0, x_i)$ podría tener un dominio mucho más amplio, y necesitamos obtener criterios para determinar si el dominio incluye todo $t > \tilde{t}$, para algún valor fijo.

Entonces, vamos a enunciar 5 lemas que nos serán utiles para entender más a fondo la intuición del teorema

Lema 1.1: Para que el teorema de Picard tenga validez, una condición necesaria es que la función $x(t, t_0, x_i)$ es continua en t, tal que se satisface que

$$x(t_0, t_0, x_i) = x_i$$

es una solución de (1) en el intervalo $(t_0 - r, t_0 + r)$ donde $r > 0$, tal que satisface la ecuación:

$$x(t_0, t_0, x_i) = x_i + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s, t_0, x_i)] \; (2)$$

para $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$

Suponga que $x(t, t_0, x_0)$ satisface la ecuación (1), entonces mientras que f y x sean continuas, podemos derivar (2) (El resultado es la ecuación (1)). Además, si $x(t, t_0, x_i)$ también satisface (1) y en particular:

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x(t, t_0, x_i)]$$

Dicha expresión es integrable en el intervalo de $[t_0, t]$ donde $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$, entonces podemos tomar la integral definida de t_0 a t a ambos lados, tal que:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{ds} = x(t, t_0, x_i) - x(t_0, t_0, x_i)]$$

$$x(t, t_0, x_i) - x_i = \int_{t_0}^{t} f[s, x(s, t_0, x_i)]ds$$

$\square$

El resto de la demostración consiste en observar que la secuencia

$$x_0(t) = x_i$$

$$x_1(t) = x_i + \int_{t_0}^{t} f[s, x_0(s)]ds$$

$$\vdots$$

$$x_{m+1}(t) = x_i + \int_{t_0}^{t} f[s, x_{m+1}(s)]ds$$

converge en $[t_0 - A, t_0 + A]$ a una función la cual es la solución de la ecuación (2) en el interior de dicho intervalo.

Lema 1.2 Para cada m, la función $x_m(t)$ está definida y es continua en $[t_0, t_0 + A]$, entonces:

$$|x_m(t) - x_i| \leq M|t - t_0|$$

Lema 1.3 La sucesión $x_m(t)$ converge unif. en $[t_0, t_0 + A]$ a una función continua $x(t)$.

Análisis de prueba: La demostración pasa por probar que:

$$x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}[x_{n+1}(t) - x_n(t)]$$

converge uniformemente en $[t_0, t_0 + A]$. *Una forma es utilizando el M-test de Weierstrass.*

Lema 1.4: La función $x(t)$ es una solución de la expresión (2), tal que $x(t_0) = x_i$.

Lema 1.5: La solución $x(t)$ satisface la condición inicial $x(t_0) = x_i$. La cual es la única solución de (1) que satisface la condición inicial.

La demostración, de estos 5 lemas van a demostrar el teorema de Picard de manera inmediata.

Este teorema, nos da como resultado un ≪corolario≫ no inmediato, el cual es el teorema de existencia de Diferenciabilidad.

Teorema de Diferenciabilidad

Teorema: Sea D un abierto en el espacio euclideo (t, x). Sea $(t_0, x_i) \in D$ y suponga que $f(t, x)$ está definida y tiene segundas derivadas parciales continuas con respecto a todas las variables, para cada punto en D. Entonces existen números reales positivos a, b tal que si $|\tilde{x} - x_i| \leq b$, la ecuación diferencial (1) tiene solución única $x(t_0, t_0, \tilde{x})$ en $(t_0 - a, t_0 + a)$ con

$$x(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}$$

Y para cada punto en conjunto

$$S = \{(t, x) : |t - t_0| < a; |x - x_i| < b\}$$

la función $x(t, t_0, \tilde{x})$ es de clase C^3 con respecto a t y tiene primeras derivadas parciales con respecto a cada componente de $\tilde{x}$.

Procedemos a demostrar este teorema, ya que detalla como los lemas del punto anterior son utiles para realizar la demostración.

Demostración:
Por el teorema de existencia de Picard, existe una solución $x(t, t_0, \tilde{x})$ para (1), tal que:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, t_0, \tilde{x}) = f[t, (t, t_0, \tilde{x})] \ (3)$$

Mientras f sea continua, entonces $\dfrac{\partial x}{\partial t}$ es una función continua de $(t, \tilde{x})$. Mientras que f tenga primera y segunda derivada parcial continua entonces, la regla de la cadena sobre (1) garantiza que se puede encontrar $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ y $\dfrac{\partial^3 x}{\partial t^2}$ son funciones continuas de $(t, \tilde{x})$.

Ahora, por el lema 1.1, si $x(t, t_0, \tilde{x})$ es una solución de la ecuación (1), tal que $x(t_0, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x}$, entonces

$$x(t, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s, t_0, \tilde{x})] ds \ (4)$$

Ahora, si dicha solución existe y es diferenciable con respecto a las variables $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, podemos derivar a ambos lados de la ecuación (3) con respecto a $\tilde{x}$ y obtener:

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_i} = I_i + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}[s, x(s, t_0, \tilde{x})]\right] \left[\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_i}\right] ds$$

donde

$$I_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y $\left[\dfrac{\partial x}{\partial \tilde{x}_i}\right]$ es la matriz Jacobiana de x.

Por otra parte, podemos proceder de manera similar al teorema de Picard, tal que podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x(t) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s)]ds$$

$$y^{(i)}(t) = I_i + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}[s, x(s)]\right] \left[y^{(i)}(s)\right] ds \ (5)$$

Mientras f sea continua, va a tener segundas derivadas parciales con respecto a x, siguiendo que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$ satisface la condición de Lipschitz en x.

Luego, sea $(x(t, t_0, \tilde{x}), y(t, t_0, \tilde{x}))$ una solución de (5), obtenida aplicando el Teorema de Picard, entonces $(x(t, t_0, \tilde{x}), y^{(1)}(t, t_0, \tilde{x}), \ldots, y^{(n)}(t, t_0, \tilde{x}))$ es el límite y **converge uniformemente** en un conjunto

$$\mathcal{R} = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - \tilde{x}| \leq b\}$$

de la sucesión $\{(x_m(t, t_0, \tilde{x}), y_m^{(1)}(t, t_0, \tilde{x}), \ldots, y_0^{(n)}(t, t_0, \tilde{x}))\}$, donde

$$(x_0(t, t_0, \tilde{x}), y_0^{(1)}(t, t_0, \tilde{x}), y_0^{(n)}(t, t_0, \tilde{x})) = (\tilde{x}, 1, \ldots, 1)(6)$$

y además:

$$x_{m+1}(t, t_0, \tilde{x}) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} f[s, x_m(s, t_0, \tilde{x})]ds(1{,}8)$$

$$y_{m+1}^{(i)}(t, t_0, \tilde{x}) = I_i + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}[s, x_m(s, x_m(s, t_0, \tilde{x}))]\right] [y_m^{(i)}(s, t_0, \tilde{x})]ds \ (7)$$

Por (5), tenemos que que $y_0^{(i)} = \dfrac{\partial x_0}{\partial \tilde{x}_i}$. Ahora suponga que para algún m fijo y $\forall (t, x) \in int(\mathcal{R})$, esto es verdad mientras que $\dfrac{\partial x_m}{\partial \tilde{x}_i} = y_m^{(i)}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Derivado (6) con respecto a $\tilde{x}_i$, obtenemos:

$$\frac{\partial x_{m+1}}{\partial \tilde{x}_i} = I_i + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}[s, x_m(s, t_0, \tilde{x})]\right] \left[\frac{\partial x_m}{\partial \tilde{x}_i}(s, t_0, \tilde{x})\right] ds = y_m^{(i)}(t, t_0, \tilde{x})$$

De este modo, por inducción, se sigue que para todo m y para todo $(t, x) \in int(\mathcal{R})$, es cierto que:

$$\frac{\partial x_m}{\partial \tilde{x}_i}$$

Pero la sucesión

$$\{y_m^{(1)}(t, t_0, \tilde{x})\} = \left\{\frac{\partial x_m}{\partial \tilde{x}_i}(t, t_0, \tilde{x})\right\}$$

converge uniformemente en $\mathcal{R}$ a $y^{(i)}(t, t_0, \tilde{x})$. En esencia por el teorema de convergencia (normal) de cálculo, se tiene que:

$$y^{(i)}(t, t_0, \tilde{x})\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}_i}(t, t_0, \tilde{x}), \ i = 1, \ldots, n$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Teorema de existencia sin unicidad

Para finalizar con los teoremas de existencia, basta demostrar el teorema el teorema de existencia sin unicidad. Para ello, vamos a considerar los siguientes teoremas:

Teorema de Arzelá-Ascoli: Sean K un espacio métrico compacto. Si una sucesión $a_n \subseteq C(K)$ es puntualmente acotada y uniformemente continua, entonces tiene una subsucesión que converge uniformemente.

Teorema de Punto fijo de Schauder: Sea X un espacio de Banach y sea $T : X \longrightarrow X$ un operador continuo y compacto. Si el conjunto $\{x \in X : x = \lambda Tx \text{ para algún } \lambda \in [0,1]\}$ es acotado en X, entonces T tiene al menos un punto fijo.

La idea de definir estos teoremas, es con el fin de no pasar por definir ninguna contracción, y que la demostración sea más directa.

Ahora procedemos a realizar la demostración del teorema.:

Teorema de existencia SIN unicidad: Sea f una función continua en D un subconjunto abierto del espacio euclideo (t,x). Considere el punto $(t_0, x_i) \in D$ y sean a y b constantes reales positivas tal que que el conjunto:

$$R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_i| \leq b\}$$

está contenido en D.

Denote M, A, a, b, x_i y t_0, de la misma forma que en el teorema de Picard.

Entonces existe una solución $x(t, t_0, x_i)$ de (1) en $(t_0 - A, t_0 + A)$, tal que $x(t_0, t_0, x_i) = x_i$.

Demostración:

Sea $J = [t_0 - A, t_0 + A]$ y sea $C[J, \mathbb{R}^n]$ un espacio métrico. Denote el espacio de Banach de n-vectores de funciones continuas $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ con dominio J, tal que:

$$\|\phi\| = \sup_{t \in J} \sum |\phi_i(t)|$$

Sea:

$$\mathcal{F} = \{\phi \in C[J, R^n] : \phi(t_0) = x_i;\ |\phi(t) - x_i| \leq b\},\ para\ t \in J$$

Entonces es fácil ver que $\mathcal{F}$ es cerrado y acotado (compacto) y convexo en $C[J, \mathbb{R}^n]$. Entoces defina el mapeo:

$$\mathcal{M} : \mathcal{F} \longrightarrow C[J, \mathbb{R}^n]$$

Entonces si $\phi(t) \in \mathcal{F}$ entonces:

$$(\phi)(t) = x_i + \int_{t_0}^{t} f[s, \phi(s)]ds$$

Por los teoremas de cálculo, se sigue que si $\phi[J, \mathbb{R}^n]$, entonces $\mathcal{M}\phi \in C[J, \mathbb{R}^n]$. Entonces el mapeo de $\mathcal{F}$, permanece invariante, es decir que:

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$$

Ya que:

$$(\mathcal{M}\phi)(t_0) = x_i$$

y

$$|(\mathcal{M}\phi)(t) - x_i| \leq \int_{t_i}^{t} |f(s, \phi(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq MA \leq M \cdot \frac{b}{M} = b$$

$\mathcal{M}(\mathcal{F})$ es un conjunto uniformemente continuo, ya que $t, \tilde{t} \in J$, entonces

$$|(\mathcal{M}\phi)(t) - (\mathcal{M}\phi)(\tilde{t})| \leq \int_{\tilde{t}}^{t} |f(s, \phi(s))| ds \leq M|t - \tilde{t}|$$

y M es independiente de ϕ.

Por **Arzelá-Ascoli**, $\mathcal{M}$ es un mapeo de $\mathcal{F}$ que se mapea compactamente a si mismo.

Por el **teorema de Schauder** $\mathcal{M}$ tiene un punto fijo. Donde la función $\phi \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\phi(t) = (\mathcal{M}\phi)(t) = x_i + \int_{t_0}^{t} f[s, \phi(s)] ds$$

□

Según, demostrado en la sección anterior, podemos garantizar que en los sistemas lineales, bajo ciertas condiciones, siempre hay una única solución, y se puede expresar de manera analítica. Ahora si bien, en sistemas no lineales, la existencia de una solución única puede depender de condiciones más rigurosas y puede no garantizarse en todos los casos.

2. Aplicaciones y aspectos importantes

Continuidad de la función f

La continuidad de la función $f(t, x)$ es fundamental para garantizar la existencia y unicidad de soluciones a las EDO. Incluso, el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf establece condiciones bajo las cuales una EDO tiene una única solución en un vecindario local alrededor de una condición inicial.

Un ejemplo importante de como la continuidad de la función influye es en el análisis de sistemas dinámicos. La continuidad de la función f es esencial para evaluar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Entonces ¿qué sucede si la función no es continua?

Numericalmente, la falta de continuidad no puede garantizar la la existencia de una solución y mucho menos su unicidad. Además dificulta algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, como el método de Euler o Runge-Kutta. Además, la discontinuidad de f implica que existe al menos un punto en donde la función f no es diferenciable entonces no podemos utilizar los demás teoremas.

Ejemplo:

Considere la ecuación diferencial dada por:

$$y'' + 4y = f(t) \ ; \ y(0) = 0 \ \ y'(0) = 0$$

Dicha función **NO** es continua. Pero se puede verificar que tomando:

$$f(t) = tu_3(t) = ((t-3)+3)u_3)u_3(t))$$

Aplicando las transformadas de Laplace respectivas, obtenemos que una solución de la ecuación es:

$$y(t) = u_3(t)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(t-3)^2 - \frac{3}{4}cos2(t-3) - \frac{1}{4}sin2(t-3)\right)$$

De esta manera es claro, que la discontinuidad de una función NO necesariamente implica que la ecuación diferencial no tenga solución.

Condición de Lipschitz

Ahora bien, es importante conocer por qué la función f debe satisfacer la condición de Lipschitz, para la aplicación de los teoremas.

Recordemos que la condición de Lipschitz garatiza que f es una función uniformemente continua. Esto garantiza que la función f es continua. Esta condición puede ser muy fuerte, pero garantiza que la función sea lo suficientemente suave y estable para que garantice la unicidad de las soluciones.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Consideremos la siguiente EDO:

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Esta ecuación describe el decaimiento exponencial de una sustancia con una constante de decaimiento $k > 0$.

La función $f(x,t) = -kx$ satisface la condición de Lipschitz.

Para demostrar esto, tomemos dos valores cualesquiera x_1 y x_2 en un conjunto D:

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| = |-kx_1 + kx_2| = k|x_2 - x_1|$$

Aquí, $L = k$ proporciona una cota para la tasa de cambio de f con respecto a x. Por lo tanto, la función $f(x,t)$ satisface la condición de Lipschitz en x, y según el teorema de existencia y unicidad de soluciones, garantiza la existencia y unicidad local de soluciones.

Ejemplo: Considere la función f dada por

$$f(t) = x^{2/3}$$

Note que dicha función es continua, pero no es localmente Lipschitz, pues:

$$\left|\frac{f(t,x_1) - f(t,x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \left|\frac{x_2^{1/3} - x_2^{1/3}}{x_2^{2/3} + x_2^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}}\right|$$

Utilizando el método de variables separables, la grafica de las soluciones, es la siguiente

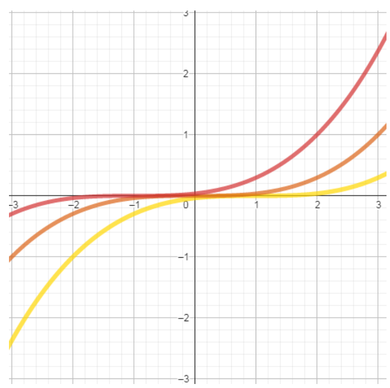

Figura 1: Soluciones de la ecuación diferencial $x' = x^{2/3}$

Note que no existe un vecindario local en dónde dichas soluciones sean únicas (exceptuando el cero). De esta forma es importante solicitar la condición de Lipschitz para garantizar la unicidad de las soluciones.

Referencias

[1.] Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems. Prentice Hall.

[2.] Cronin. J. (2008). Ordinary Differential Equations: Introduction to Qualitative Theory. Third Edition. Chaman & Hall.